



Manejo de incertidumbre en mediciones y resultados experimentales

Dr. Julio C. Sacramento Rivero
Facultad de Ingeniería Química, Universidad Autónoma de Yucatán

Disclaimer



Experimental Thermal and Fluid Science

Volume 1, Issue 1, January 1988, Pages 3-17



Describing the uncertainties in experimental results

Robert J. Moffat 

[Show more](#) 

 Add to Mendeley  Share  Cite

[https://doi.org/10.1016/0894-1777\(88\)90043-X](https://doi.org/10.1016/0894-1777(88)90043-X) 

[Get rights and content](#) 

Ejemplo: Medición del peso

Réplica	Peso de Muestra (g)
1	50.119
2	51.941
3	49.221
Promedio	50.427
D.E.	1.386

Usualmente reportamos:

$$W = 50.427 \pm 1.386 \text{ g}$$



Ejemplo: Medición del peso

Réplica	Peso de Muestra (g)
1	50.119
2	51.941
3	49.221
Promedio	50.427
Desv. Est. (s)	1.386

Usualmente reportamos:

$$W = 50.427 \pm 1.386 \text{ g}$$

En general:

$$X = \bar{X} \pm \delta X$$

Incertidumbre

donde $\delta X = 2s$



Fuentes de incertidumbre: Instrumento

Incetridumbre de orden 0



F.S. = 0 – 20 g

Errores fijos	Indicación	Valor
Resolución	0.1 mg	0.1 mg
Precisión	0.1 mg	0.1 mg
Estabilidad a largo plazo	0.01% F.S.	2.0 mg
Desviación por temperatura	0.02 % F.S.	4.0 mg
Calibración (off-set)	Variable	0.0 mg
Errores variables		
Reproducibilidad	0.01 % o.M.	

Fuentes de incertidumbre: Instrumento

Incetridumbre de orden 0



F.S. = 0 – 20 g

$$\delta X^0 = \sqrt{\sum_i (\delta X_i^0)^2}$$

Errores fijos	Indicación	Valor
Resolución	0.1 mg	0.1 mg
Precisión	0.1 mg	0.1 mg
Estabilidad a largo plazo	0.01% F.S.	2.0 mg
Desviación por temperatura	0.02 % F.S.	4.0 mg
Calibración (off-set)	Variable	0.0 mg
Errores variables		
Reproducibilidad	0.01 % o.M.	

Fuentes de incertidumbre: Instrumento-Sistema

Incetidumbre de orden 1



Réplica	Peso(g)
1	50.119
2	51.941
3	49.221
Promedio	50.427
$S_{\text{aux}} =$	1.386

desviación estándar auxiliar
(valor más probable)

Fuentes de incertidumbre: Instrumento-Sistema

Incetidumbre de orden 1



Réplica	Peso(g)
1	50.119
2	51.941
3	49.221
Promedio	50.427
$S_{aux} = 1.386$	

desviación estándar auxiliar
(valor más probable)

No. de réplicas	$\frac{s^1}{S_{aux}}$	
	Máx.	Míx.
3	5.26	0.58
5	2.45	0.63
10	1.75	0.70
20	1.44	0.76
30	1.34	0.80

Rango de valores posibles

$$\delta X^1 = 2 s^1$$

Fuentes de incertidumbre: Incertidumbre total

Incertidumbre de orden n



Toma en cuenta los errores fijos y variables de todo tipo en los experimentos. Ojo con las fuentes de error *determinísticos* (no *aleatorias*).

$$\delta X^n = \sqrt{(\delta X^1)^2 + (\delta X_{\text{fijo}}^0)^2}$$

Ejemplo: Medición del peso



Réplica	Peso de Muestra (g)
1	50.119
2	51.941
3	49.221
Promedio	50.427
Desv. Est. (s_{aux})	1.386

Errores fijos	Indicación	Valor
Resolución	0.1 mg	0.1 mg
Precisión	0.1 mg	0.1 mg
Estabilidad a largo plazo	0.01% F.S.	2.0 mg
Desviación por temperatura	0.02 % F.S.	4.0 mg
Calibración (off-set)	Variable	0.0 mg
Errores variables		
Reproducibilidad	0.01 % o.M.	

$$\delta X^0 = \sqrt{(0.1)^2 + (0.1)^2 + (2.0)^2 + (4.0)^2} = 4.474 \text{ mg}$$

Ejemplo: Medición del peso



Réplica	Peso de Muestra (g)
1	50.119
2	51.941
3	49.221
Promedio	50.427
Desv. Est. (s_{aux})	1.386

Errores fijos	Indicación	Valor
Resolución	0.1 mg	0.1 mg
Precisión	0.1 mg	0.1 mg
Estabilidad a largo plazo	0.01% F.S.	2.0 mg
Desviación por temperatura	0.02 % F.S.	4.0 mg
Calibración (off-set)	Variable	0.0 mg

Errores variables

Reproducibilidad	0.01 % o.M.
------------------	-------------

$$\delta X^1 = 2(1.386) = 2.772 \text{ g}$$

Nota: el valor real está en

$$5.26 > \frac{s^1}{s_{aux}} > 0.58$$

$$\delta X^0 = \sqrt{(0.1)^2 + (0.1)^2 + (2.0)^2 + (4.0)^2} = 4.474 \text{ mg}$$

Ejemplo: Medición del peso



Réplica	Peso de Muestra (g)
1	50.119
2	51.941
3	49.221
Promedio	50.427
Desv. Est. (s_{aux})	1.386

Errores fijos	Indicación	Valor
Resolución	0.1 mg	0.1 mg
Precisión	0.1 mg	0.1 mg
Estabilidad a largo plazo	0.01% F.S.	2.0 mg
Desviación por temperatura	0.02 % F.S.	4.0 mg
Calibración (off-set)	Variable	0.0 mg

Errores variables

Reproducibilidad	0.01 % o.M.
------------------	-------------

$$\delta X^1 = 2(1.386) = 2.772 \text{ g}$$

Nota: el valor real está en

$$5.26 > \frac{s^1}{s_{aux}} > 0.58$$

$$\delta X^0 = \sqrt{(0.1)^2 + (0.1)^2 + (2.0)^2 + (4.0)^2} = 4.474 \text{ mg}$$

$$\delta X^n = \sqrt{(2.772)^2 + (4.474)^2} = 5.26 \text{ mg}$$

Ejemplo: Medición del peso



Réplica	Peso de Muestra (g)
1	50.119
2	51.941
3	49.221
Promedio	50.427
Desv. Est. (s_{aux})	1.386

Errores fijos	Indicación	Valor
Resolución	0.1 mg	0.1 mg
Precisión	0.1 mg	0.1 mg
Estabilidad a largo plazo	0.01% F.S.	2.0 mg
Desviación por temperatura	0.02 % F.S.	4.0 mg
Calibración (off-set)	Variable	0.0 mg

Errores variables

Reproducibilidad	0.01 % o.M.
------------------	-------------

$$\delta X^1 = 2(1.386) = 2.772 \text{ g}$$

Nota: el valor real está en

$$5.26 > \frac{s^1}{s_{aux}} > 0.58$$

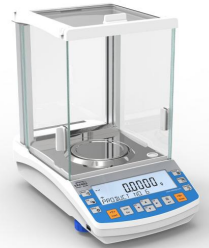
$$\delta X^0 = \sqrt{(0.1)^2 + (0.1)^2 + (2.0)^2 + (4.0)^2} = 4.474 \text{ mg}$$

$$\delta X^n = \sqrt{(2.772)^2 + (4.474)^2} = 5.26 \text{ mg}$$



Propagación de la incertidumbre

Ejemplo: Medición de la humedad



$$W_1 \pm \delta W_1$$

Peso húmedo, $W_h = W_2 - W_1$



$$W_2 \pm \delta W_2$$

Peso seco, $W_s = W_3 - W_1$

Agua perdida, $W_a = W_2 - W_3$



$$W_3 \pm \delta W_3$$

Humedad b. s., $H_{bs} = \frac{W_a}{W_s} = \frac{W_2 - W_3}{W_2 - W_1}$

Humedad b. h., $H_{bh} = \frac{W_a}{W_h} = \frac{W_2 - W_3}{W_3 - W_1}$

Ejemplo: Medición de la humedad



Resultados

Réplica	Cápsula (W1)	Cápsula Mh (W2)	Peso Húm (Wh)	Cápsula Ms (W3)	Agua perdida (Wa)	Humedad bh (Hbh)
1	50.119	51.158	1.039	51.01	0.148	0.1424
2	51.941	52.31	0.369	52.26	0.05	0.1355
3	49.221	50.174	0.953	50.04	0.134	0.1406

* Todos los pesos en gramos

Promedio **0.1395**
 D.E. **0.004**
 C.V. **2.6%**

$H \pm \delta H$



$W_1 \pm \delta W_1$

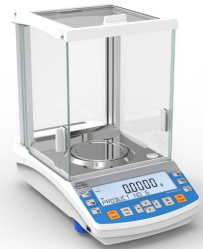


$W_2 \pm \delta W_2$



$W_3 \pm \delta W_3$

Ejemplo: Medición de la humedad



Resultados

Réplica	Cápsula (W1)	Cápsula Mh (W2)	Peso Húm (Wh)	Cápsula Ms (W3)	Agua perdida (Wa)	Humedad bh (Hbh)
1	50.119	51.158	1.039	51.01	0.148	0.1424
2	51.941	52.31	0.369	52.26	0.05	0.1355
3	49.221	50.174	0.953	50.04	0.134	0.1406

* Todos los pesos en gramos

Promedio **0.1395**
 D.E. **0.004**
 C.V. **2.6%**

¿H ± δH?

$\delta W_1, \delta W_2, \delta W_3$

¿Dónde quedaron?



$W_1 \pm \delta W_1$



$W_2 \pm \delta W_2$



$W_3 \pm \delta W_3$

Propagación de incertidumbre

Si una variable (**resultado**) R depende de varias variables (**mediciones**) X_i :

$$R = f(X_1, X_2, X_3 \dots X_n)$$

entonces:

$$\delta R = \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial R}{\partial X_i} \delta X_i \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Coeficiente de sensibilidad

bajo los supuestos:

1. Las mediciones X_i tienen una distribución normal
2. Los efectos de covarianzas son pequeños
3. Las D.E. s_i se estiman con el mismo nivel de confianza (p.ej. 95 %)

Propagación de incertidumbre

Caso 1: R es una suma algebraica de X_i :

$$R = X_1 \pm X_2 \pm \dots \pm X_n$$

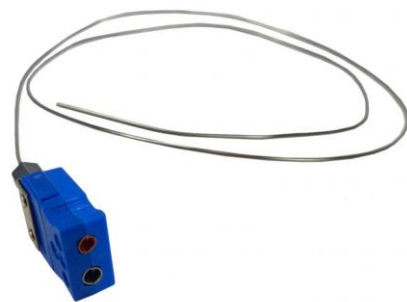
entonces:

$$\delta R = \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial R}{\partial X_i} \delta X_i \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$



$$\delta R = \left[\sum_{i=1}^n (\pm 1 \cdot \delta X_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Coeficiente de
sensibilidad



Ejemplo: Diferencia de temperaturas. Considere termopares tipo T con $\delta T_i = 0.2 \text{ K}$

$$\Delta T = T_1 - T_2$$

$$\Delta T = 100^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = 80 \text{ K}$$

$$\delta(\Delta T) = [(\delta T_1)^2 + (\delta T_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\delta(\Delta T) = [(0.2)^2 + (0.2)^2]^{\frac{1}{2}} = 0.28 \text{ K}$$

$$\Delta T = 80 \pm 0.28 \text{ K}$$

Propagación de incertidumbre



Ejemplo: Diferencia de temperaturas. Considere termopares tipo T con $\delta T_i = 0.2 \text{ K}$

$$\Delta T = T_1 - T_2$$

$$\Delta T = 100^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = 80^\circ\text{C}$$

$$\delta(\Delta T) = [(\delta T_1)^2 + (\delta T_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\delta(\Delta T) = [(0.2)^2 + (0.2)^2]^{\frac{1}{2}} = 0.28 \text{ K}$$

$$\Delta T = 80 \pm 0.28 \text{ K}$$

Pero... Si **se incluye** el error del sistema de **adquisición de datos** (error de 0.05 % del rango)

Rango: -250 a 300 °C, incertidumbre de: $(550)(0.0005) = 0.275 \text{ K}$

Ajustando la incertidumbre de orden 0 del sistema termopar-adquisición:

$$\delta X^0 = \sqrt{\sum_i (\delta X_i^0)^2} = \sqrt{(0.2)^2 + (0.275)^2} = 0.34$$

Incertidumbre corregida para cada termopar

$$\delta(\Delta T) = [(0.34)^2 + (0.34)^2]^{\frac{1}{2}} = 0.48 \text{ K}$$

$$\Delta T = 80 \pm 0.48 \text{ K}$$

Propagación de incertidumbre



Caso 2: R es un producto puro de X_i :

$$R = X_1^a \cdot X_2^b \dots \cdot X_n^N$$

entonces:

$$\delta R = \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial R}{\partial X_i} \delta X_i \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{\delta R}{R} = \left[\left(a \frac{\delta X_1}{X_1} \right)^2 + \left(b \frac{\delta X_2}{X_2} \right)^2 + \dots + \left(N \frac{\delta X_n}{X_n} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Ejemplo: Cálculo de la Humedad. Para la repetición 1:

$$\frac{\delta H}{H} = \left[\left(1 \frac{\delta W_a}{W_a} \right)^2 + \left(-1 \frac{\delta W_h}{W_h} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$H = \frac{W_a}{W_h} = \frac{0.148 \pm 0.007}{1.039 \pm 0.007} = 0.1424 \pm \delta H$$

$$\delta H = 0.1424 \left[\left(1 \frac{0.007}{0.148} \right)^2 + \left(-\frac{0.007}{1.039} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$H = 0.1424 \pm 0.007 \text{ g}$$

$$\delta H = 0.0068 \text{ g}$$

Propagación de incertidumbre

Caso 3: R depende de una sola variable X modificada por coeficientes y/o exponentes

$$R = aX^b$$

entonces:

$$\delta R = \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial R}{\partial X_i} \delta X_i \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{\delta R}{R} = b \frac{\delta X}{X}$$

Ejemplo integrado: Cálculo de la Humedad promedio.

$$\bar{H} = \frac{H_1 + H_2 + H_3}{3} \Rightarrow \frac{\delta \bar{H}}{\bar{H}} = 1 \frac{\delta(\Sigma H_i)}{\Sigma H_i}$$

Réplica	Cápsula (W1)	Cápsula Mh (W2)	Peso Húm (Wh)	Cápsula Ms (W3)	Agua perdida (Wa)	Humedad bh (Hbh)
1	50.119	51.158	1.039	51.01	0.148	0.1424
2	51.941	52.31	0.369	52.26	0.05	0.1355
3	49.221	50.174	0.953	50.04	0.134	0.1406

Promedio **0.1395**
D.E. **0.004**
C.V. **2.6%**

* Todos los pesos en gramos

$$H_1 = \frac{W_a}{W_h} = \frac{0.148 \pm 0.007}{1.039 \pm 0.007} = 0.1424 \pm 0.007 \text{ g}$$

$$H_2 = \frac{W_a}{W_h} = \frac{0.05 \pm 0.007}{0.369 \pm 0.007} = 0.1355 \pm 0.02 \text{ g}$$

$$H_3 = \frac{W_a}{W_h} = \frac{0.134 \pm 0.007}{0.953 \pm 0.007} = 0.1355 \pm 0.007 \text{ g}$$

Propagación de incertidumbre

Ejemplo integrado: Cálculo de la Humedad promedio.

$$\bar{H} = \frac{H_1 + H_2 + H_3}{3} \Rightarrow \frac{\delta \bar{H}}{\bar{H}} = 1 \frac{\delta(\Sigma H_i)}{\Sigma H_i}$$

Réplica	Cápsula (W1)	Cápsula Mh (W2)	Peso Húm (Wh)	Cápsula Ms (W3)	Agua perdida (Wa)	Humedad bh (Hbh)
1	50.119	51.158	1.039	51.01	0.148	0.1424
2	51.941	52.31	0.369	52.26	0.05	0.1355
3	49.221	50.174	0.953	50.04	0.134	0.1406

Promedio **0.1395**
 D.E. **0.004**
 C.V. **2.6%**

* Todos los pesos en gramos

$$H_1 = \frac{W_a}{W_h} = \frac{0.148 \pm 0.007}{1.039 \pm 0.007} = 0.1424 \pm 0.007 \text{ g}$$

$$H_2 = \frac{W_a}{W_h} = \frac{0.05 \pm 0.007}{0.369 \pm 0.007} = 0.1355 \pm 0.02 \text{ g}$$

$$H_3 = \frac{W_a}{W_h} = \frac{0.134 \pm 0.007}{0.953 \pm 0.007} = 0.1406 \pm 0.007 \text{ g}$$

$$\delta(\Sigma H_i) = 0.4185 \pm 0.022 \text{ g}$$

$$\bar{H} = \frac{H_1 + H_2 + H_3}{3} = 0.1395 \pm 0.0073 \text{ g}$$

$$\delta \bar{H} = (0.1395) \frac{0.022}{0.4185} = 0.0073 \text{ g}$$

Propagación de incertidumbre

Otro ejemplo integrado: *Cálculo de la DTML*

$$\text{DTML} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}} \quad \text{Se definen:} \quad \begin{aligned} f_1 &= \Delta T_1 - \Delta T_2 \\ f_2 &= \ln \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} \end{aligned} \Rightarrow \text{DTML} = \frac{f_1}{f_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta(\text{DTML})}{\text{DTML}} = \left[\left(\frac{\delta f_1}{f_1} \right)^2 + \left(-\frac{\delta f_2}{f_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{Caso 2}$$

$$\delta f_1 = [(\delta \Delta T_1)^2 + (-\delta \Delta T_2)^2]^{\frac{1}{2}} \quad \text{Caso 1}$$

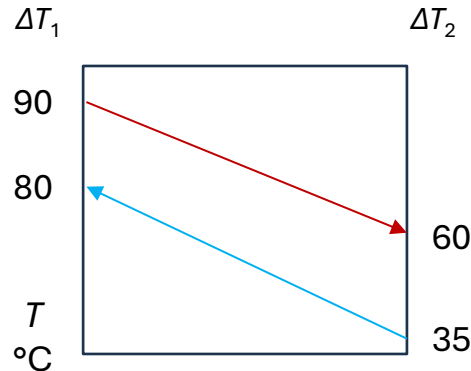
$$\delta R = \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial R}{\partial X_i} \delta X_i \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{Fórmula general}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial(\Delta T_1)} = \frac{1}{\Delta T_1}; \quad \frac{\partial f_2}{\partial(\Delta T_2)} = -\frac{1}{\Delta T_2}$$

$$\Rightarrow \delta f_2 = \left[\left(\frac{\delta(\Delta T_1)}{\Delta T_1} \right)^2 + \left(-\frac{\delta(\Delta T_2)}{\Delta T_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Propagación de incertidumbre

Otro ejemplo integrado: Cálculo de la DTML Mediciones con termopares tipo T, $\delta T_i = 0.2 \text{ K}$



$$\Delta T_1 = 10 \pm 0.28 \text{ K}$$

$$\Delta T_2 = 25 \pm 0.28 \text{ K}$$

$$f_1 = \Delta T_1 - \Delta T_2 = -25 \text{ K}$$

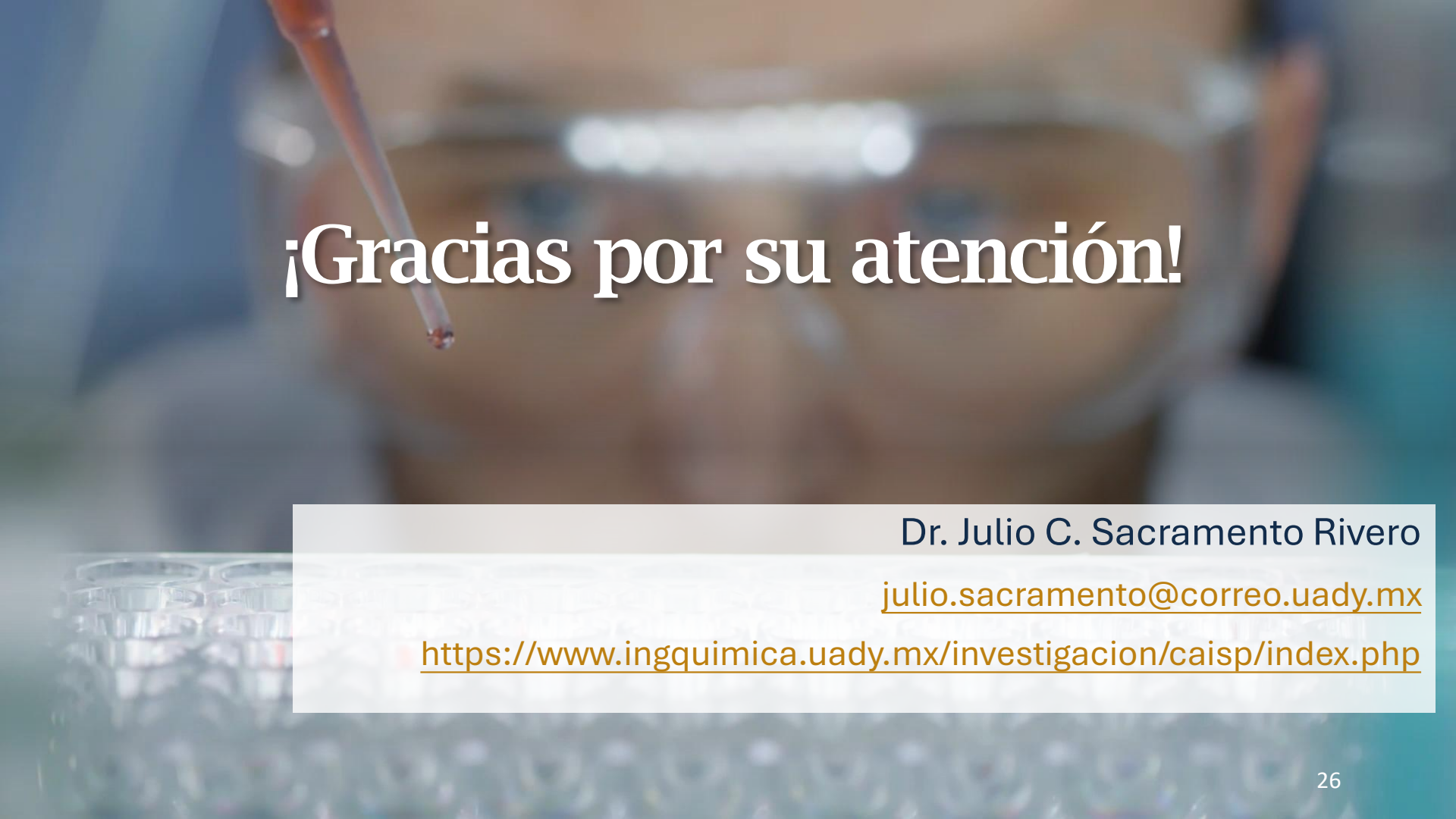
$$\delta f_1 = [(\delta \Delta T_1)^2 + (-\delta \Delta T_2)^2]^{\frac{1}{2}} = 0.40 \text{ K}$$

$$f_2 = \ln \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = -0.916$$

$$\delta f_2 = \left[\left(\frac{\delta(\Delta T_1)}{\Delta T_1} \right)^2 + \left(-\frac{\delta(\Delta T_2)}{\Delta T_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 0.03 \text{ K}$$

$$\text{DTML} = \frac{f_1}{f_2} = 27.28 \text{ K} \quad \delta(\text{DTML}) = (\text{DTML}) \left[\left(\frac{\delta f_1}{f_1} \right)^2 + \left(-\frac{\delta f_2}{f_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 0.99 \text{ K}$$

$$\text{DTML} = 27.28 \pm 0.99 \text{ K}$$



¡Gracias por su atención!

Dr. Julio C. Sacramento Rivero

julio.sacramento@correo.uady.mx

<https://www.ingquimica.uady.mx/investigacion/caisp/index.php>